Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Développements :

Invariants de Frobenius, Formes de Hankel.

Bibliographie :

Rombaldi, Gourdon, H2G2, OA, Mansuy-Mneimné.

Rapport du jury :

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X.u$ pour tout vecteur u.

Remarque 1. *Attention : Certains résultats ne me semblaient pas dans le bon ordre !*

1 Formes linéaires et noyaux

1.1 Formes linéaires et dual

Définition 2 (Romb p443). *[Gourdon p126] Forme linéaire.*

Exemple 3. Tr*, les applications coordonnées, $df(a)$ sont des formes linéaires, l'évaluation des polynômes, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire dont on fixe une coordonnée.*

Proposition 4 (Romb p443). *L'ensemble des formes linéaires forme un K-ev.*

Proposition 5 (OA p151). *Une forme linéaire est soit nulle soit surjective.*

Proposition 6 (Rouvière). *Hahn Banach.*

Application 7. $||x|| = max l(x)/||l||$.

1.2 Noyaux des formes linéaires : hyperplans

Définition 8 (Romb p447). *Hyperplan.*

Exemple 9 (Escofier). $\{(x, y, z), y = 0\}$, $\{P, P(0) = 0, P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

Définition 10 (Romb p447). *Si $H = ker(\phi)$, on dit que ϕ est une équation de H.*

Proposition 11 (Romb p447). *Deux formes linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont liées.*

Théoreme 12 (Romb p447). *Un hyperplan est un sev de E supplémentaire d'une droite.*

Théoreme 13 (Romb p448). *Si E est de dimension n, un hyperplan est de dimension $n - 1$.*

Proposition 14 (Gourdon p129). *L'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur H est une droite de $E*$.*

Proposition 15. *Les applications linéaires qui laissent stables tous les hyperplans sont les homothéties.*

Proposition 16 (Romb p446). *Si $\cap_{i=1}^{p} ker(\phi_i) \subset ker(\phi)$ alors ϕ est combinaison linéaire des ϕ_i.*

Application 17. *Théorème des extrema liés.*

Théoreme 18 (OA p103). *Théorème de Riesz.*

Application 19. *Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a $E \simeq E*$ par l'isomorphisme du théorème de Riesz.*

Définition 20 (OA p5). *Vecteur gradient.*

2 Dualité

2.1 Bidual

Définition 21 (Gourdon p126). *Espace bidual.*

Proposition 22 (Gourdon p127). *E est canoniquement isomorphe à $E**$ via ...*

Remarque 23 (Gourdon p127). *En dimension infinie, cet isomorphisme est injectif mais pas surjectif.*

2.2 Dual et base duale

Définition 24 (Gourdon p127)**.** *Forme linéaire coordonnée.*

Proposition 25 (Gourdon p127)**.** *$B*$ est une base de $E*$, appelée base duale. En particulier, $dim(E) = dim(E*)$.*

Proposition 26 (FGN AL 1 p329)**.** *Dual de $M_n(K)$.*

Application 27 (FGN AL1 p329)**.** *Si $f(XY) = f(YX)$ alors f est colinéaire à la trace. Tout hyperplan de $M_n(K)$ rencontre $GL_n(K)$.*

Exemple 28. *Base duale de $\mathbb{R}^2$.*

Exemple 29 (Romb p444)**.** *[Escofier p187] Base duale de la base canonique de $R_n[X]$, de la base donnée par les polynômes interpolateurs de Lagrange.*

Remarque 30. *Isomorphisme non canonique car dépend de la base.*

Proposition 31 (Gourdon p127)**.** *Décomposition de ϕ dans la base duale.*

Proposition 32 (Gourdon p131)**.** *Si P est la matrice de passage entre deux bases de E alors la matrice de passage entre les bases duales associées est $P^{-1,t}$.*

2.3 Base antéduale

Définition 33 (Gourdon p127)**.** *Base antéduale.*

Exemple 34 (Gourdon p131)**.** *Dans $\mathbb{R}^3$.*

Exemple 35. *Pour la base de $M_n(K)*$ donnée par les $f_{i,j} := \mathrm{Tr}(E_{i,j}-) \in M_n(K)*$, la base antéduale est celle des $e_{i,j} := E_{j,i}$.*

Exemple 36. *Si $x_0, .., x_n \in \mathbb{R}$ distincts et pour tout $i \in [0.., n]$, $\phi_i \in R_n[X]^*$ est définie par $\phi_i(P) = P(xi)$, alors $(\phi_0, .., \phi_n)$ base de $\mathbb{R}_n[X]^*$ de base antéduale les polynômes de Lagrange.*

Remarque 37. *La base antéduale s'obtient par inversion d'un système linéaire.*

3 Orthogonalité et application transposée

3.1 Orthogonalité

Définition 38 (Romb p448)**.** *[Gourdon p128] Forme linéaire et vecteur orthogonaux.*

Exemple 39. *$E = \mathbb{R}_n[X]$, $P = X - 1$ et ev_0 sont orthogonaux.*

Exemple 40 (Escofier)**.** *Détermination d'orthogonaux.*

Remarque 41 (Romb p448)**.** *Si E est euclidien, on retrouve la notion classique d'orthogonalité euclidienne.*

Définition 42 (Romb p448)**.** *L'orthogonal dans $E*$ d'une partie X de E. L'orthogonal dans E d'une partie Y de $E*$.*

Remarque 43 (Gourdon p128)**.** *L'orthogonal d'une forme linéaire est son noyau.*

Proposition 44 (Romb p448)**.** *Ce sont des sev.*

Proposition 45 (Romb p449)**.** *Propriétés d'inclusion.*

Théoreme 46 (Romb p450)**.** *Propriétés sur les dimensions et égalité d'ev.*

Application 47. *Si F est un sev de E, on a $F = E$ si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Application 48 (Romb p453)**.** *[Gourdon p129] Equation d'un sev en dimension finie.*

Proposition 49 (Gourdon ex2 p131)**.** *[Romb p445] ϕ est surjective si et seulement si $\phi_1, .., \phi_p$ sont linéairement indépendantes (si et seulement si la matrice est de rang p).*

3.2 Orthogonalité et transposition

Définition 50 (Romb p453)**.** *Transposition. Elle est linéaire.*

Proposition 51 (Romb p453)**.** *L'application de transposition est linéaire et injective de $L(E, F)$ dans $L(F*, E*)$.*

Proposition 52 (Romb p454)**.** *Propriétés de la transposée.*

Proposition 53 (Romb p456)**.** *Si A est la matrice de u dans deux bases de E alors la matrice de u^t dans les bases duales associées est A^t.*

Proposition 54 (Gourdon p130)**.** *F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^t.*

Remarque 55. *A utiliser dans les raisonnements par récurrence.*

Exemple 56 (Gourdon)**.** *Trigonalisation simultanée.*

Proposition 57 (Gourdon)**.** *Changement de base dans le dual. Ici ou possible avant ?*

Proposition 58. *Dans un ev euclidien, la transposée coïncide avec l'adjoint.*

4 Applications

4.1 Réduction de Frobenius

Théoreme 59. *Invariants de similitude.*

Corollaire 60. *Réduction de Frobenius.*

Exemple 61 (Mansuy)**.** *Matrice avec blocs compagnons.*

Application 62. *Deux endomorphismes sont semblables si et seulement si ils ont les mêmes invariants de similitude.*

4.2 Formes quadratiques

Notamment algorithme de Gauss, formes de Hankel.

4.3 Autres

Inégalité d'Hadamard.